

MLP 高阶重构格式应用

傅 林, 高正红, 左英桃

(西北工业大学 航空学院

翼型叶栅空气动力学国防科技重点实验室, 西安 710072)

摘 要: 在有限体积框架下, 利用 MLP(multi-dimensional limiting process)系列重构格式结合 HLL-HLLC(Harten-Lax-van Leer with contact)近似黎曼求解器, 同时引入激波探测函数进一步降低 MLP 在光滑流动区域的数值耗散, 数值模拟了超声速前台阶流动、结冰翼型的非定常流动、高超声速双楔流动和 DLR F6-WB 跨声速流场, 研究了 MLP 系列格式在可压缩复杂流场中的表现. 结果表明: 在多维空间中, MLP 格式能够在如强斜激波与网格线不重合等复杂流场数值模拟中保持严格的流场单调性; 具有和传统 MUSCL(monotone upstream-centered schemes for conservation laws)格式类似的计算效率, 可以实现 5 阶, 甚至更高阶重构; 数值耗散更低, 捕获更准确的激波位置, 对航空工程数值模拟具有重要意义.

关 键 词: MLP (multi-dimensional limiting process);

MUSCL (monotone upstream-centered schemes for conservation laws);

HLL-HLLC (Harten-Lax-van Leer with contact); 高阶重构格式;

可压缩流

中图分类号: V211.3

文献标志码: A

Application on MLP high order reconstruction scheme

FU Lin, GAO Zheng-hong, ZUO Ying-tao

(National Key Laboratory of Science and Technology on Aerodynamic Design and Research,
School of Aeronautics,

Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Under the frame of finite volume methodology, MLP (multi-dimensional limiting process) scheme was further modified by introducing a shock-detect function to decrease the numerical dissipation in smooth regions, then supersonic flow over facing step, unsteady flow over an airfoil with ice accretion, hypersonic flow over double wedge configuration flow and subsonic flow over DLR F6-WB complex configuration were investigated by utilizing MLP high order reconstruction scheme and HLL-HLLC (Harten-Lax-van Leer with contact) approximate Riemann solver to validate the performances of proposed schemes in sophisticated compressible flow simulations. The research illustrates that: MLP can keep strict monotone flow characteristics even in the complex high-dimension fluid simulations consisting of strong oblique shock waves not aligned with grids; it has the similar computational efficiency compared with traditional MUSCL (monotone upstream-centered schemes for conservation laws) scheme and can achieve fifth or even higher order reconstruction; it features low numerical dissipation so that more accurate shock position can be captured, therefore MLP scheme is promising for aerospace engineering applications.

Key words: MLP (multi-dimensional limiting process);
MUSCL (monotone upstream-centered schemes for conservation laws);
HLL-HLLC (Harten-Lax-van Leer with contact);
high order reconstruction scheme; compressible flow

近年来,高阶格式一直是国内外计算流体领域的研究热点^[1-5].在有限体积框架下实现高阶精度的有效方法是对控制体界面上的变量进行高阶重构. CFD 研究者一直致力于研究在实现高阶精度的同时保持流场中激波等间断附近的数值单调性,提出了很多振荡抑制标准和多种限制器的概念,最具代表性的包括 TVD (total variation diminishing)^[6] 和 ENO (essentially non-oscillatory)^[7]. MUSCL^[8] 格式为满足 TVD 性质的最流行差分格式,广为工程计算人员接受.然而,目前大部分的基本无振荡高阶重构格式(如 MUSCL, WENO(weighted essentially non-oscillatory)^[9] 等)都是针对一维对流方程分析推导而来.在实际的计算中,这些数值格式通过维数分裂方法不加修正的应用于二维或者三维空间的数值模拟.在通常流动情况下,这样的解决方案满足工程计算要求;但是在一些复杂三维工况中,比如强激波位置不与网格线重合等,这些格式都不能非常有效地消除强激波附近的数值振荡.综上,开发一种在多维空间中能够有效抑制激波数值振荡的高阶限制器非常重要. Kim 等^[10] 首先成功地将一维的单调性条件推广到二维、三维,提出了多维限制器 MLP 的概念,证明了多维空间中的单调性限制标准. Gerlinger 等^[11] 进一步发展了 MLP 格式,加强了其 TVD 性质,并且改善了 MLP 系列格式的收敛性和鲁棒性.目前, MLP 系列格式还处在理论研究和探索阶段,没有广泛走向工程应用.本文主要研究其在航空工程可压缩流动数值模拟中的表现,为开发高精度、高可靠性的航空工程计算软件提供基础.

文中计算采用的求解器为作者自行研究开发的具有定常、非定常数值模拟能力的三维有限体积代码-LMNS3D^[12]. LMNS3D 拥有基于 CPU (central processing unit) 计算的 MPI (message passing interface) 并行技术和基于 GPU 计算的 CUDA (compute unified device architecture) 并行技术,能够进行大规模并行计算.通量计算可选择不同格式,如 HLL-HLLC^[13] 和 SLAU (simple low-dissipation AUSM)^[14].

1 数值方法

1.1 控制方程

LMNS3D 求解的控制方程为无量纲化以后的三维可压缩 Navier-Stokes (N-S) 方程,无量纲方法请参考文献^[15].在笛卡儿坐标系下, N-S 方程可以表示为

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} Q d\Omega + \iint_{\partial\Omega} \bar{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\partial\Omega} \bar{\mathbf{F}}^v \cdot d\mathbf{S} \quad (1)$$

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \rho u & \rho v & \rho w \\ \rho u^2 + p & \rho uv & \rho wu \\ \rho uv & \rho v^2 + p & \rho vw \\ \rho uw & \rho vw & \rho w^2 + p \\ \rho uH & \rho vH & \rho wH \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{F}}^v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \\ \phi_x & \phi_y & \phi_z \end{bmatrix}$$

式中 Q 代表控制体格心值; $\bar{\mathbf{F}}$ 等代表界面上的无黏数值通量,由 1 阶单调近似黎曼求解器给出; $\bar{\mathbf{F}}^v$ 代表黏性数值通量.提高界面上守恒变量值 $Q_{i+1/2}^l$ 和 $Q_{i+1/2}^r$ 的重构阶数可以获得较高的数值精度.

1.2 多维限制条件简要推导^[10]

对于 MUSCL 系列格式,可以将其进一步写成一般的形式

$$\begin{cases} \Phi_i = \bar{\Phi}_i + 0.5 \phi(r_i) \Delta \bar{\Phi}_{i-1/2} \\ r_i = \Delta \bar{\Phi}_{i+1/2} / \Delta \bar{\Phi}_{i-1/2} \\ \Phi_r = \bar{\Phi}_{i+1} - 0.5 \phi(r_r) \Delta \bar{\Phi}_{i+3/2} \\ r_r = \Delta \bar{\Phi}_{i+1/2} / \Delta \bar{\Phi}_{i+3/2} \\ \Delta \bar{\Phi}_{i-1/2} = \bar{\Phi}_i - \bar{\Phi}_{i-1} \\ \phi(r) = r \phi(1/r) \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\bar{\Phi}_i$ 表示格心的物理量; ϕ 是一个限制器,用来监视当地流场变量的梯度,同时返回满足 TVD 约束条件的梯度.在一维情况下, TVD 限制条件可以表示为

$$0 \leq \phi(r) \leq \min(2r, 2) \quad (3)$$

直接通过维数分裂方法将此 TVD 条件应用于多维问题仍然不足以抑制多维空间中的数值振荡,所以需要重新推导多维空间中满足 TVD 性质的限制条件.根据式(2)和式(3)可以看出

$$\begin{cases} \bar{\Phi}_{i-1} \leq \Phi_{i-1/2} \leq \bar{\Phi}_i \\ \bar{\Phi}_i \leq \Phi_{i+1/2} \leq \bar{\Phi}_{i+1} \end{cases} \quad (4)$$

此条件对于多维空间是不够的,因为仅仅考虑了网格界面两侧的点,而没有考虑控制体的角点,而这些角点的梯度信息对于抑制多维空间中的数值振荡非常重要.因此首先在三维空间中推广此约束:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{p,q,m}^{\min} &\leq \Phi_{i+p/2,j+q/2,k+m/2} \leq \bar{\Phi}_{p,q,m}^{\max} \\ p &= \{-1,1\}, q = \{-1,1\}, r = \{-1,1\} \\ \bar{\Phi}_{p,q,m}^{\min} &= \min(\bar{\Phi}_{i,j,k}, \bar{\Phi}_{i+p,j,k}, \bar{\Phi}_{i,j+q,k}, \bar{\Phi}_{i+p,j+q,k}, \\ &\quad \bar{\Phi}_{i,j,k+m}, \bar{\Phi}_{i+p,j,k+m}, \bar{\Phi}_{i,j+q,k+m}, \bar{\Phi}_{i+p,j+q,k+m}) \\ \bar{\Phi}_{p,q,m}^{\max} &= \max(\bar{\Phi}_{i,j,k}, \bar{\Phi}_{i+p,j,k}, \bar{\Phi}_{i,j+q,k}, \bar{\Phi}_{i+p,j+q,k}, \\ &\quad \bar{\Phi}_{i,j,k+m}, \bar{\Phi}_{i+p,j,k+m}, \bar{\Phi}_{i,j+q,k+m}, \bar{\Phi}_{i+p,j+q,k+m}) \end{aligned} \quad (5)$$

式中 $\bar{\Phi}_{i+p,j+q,k+m}$ 是控制体格心的变量值; $\Phi_{i+p/2,j+q/2,k+m/2}$ 是控制体角点的变量值.其中 p, q, m 的值都可以是 1 或者 -1. $\bar{\Phi}_{p,q,m}^{\min}$ 和 $\bar{\Phi}_{p,q,m}^{\max}$ 表示围绕角点 $\Phi_{i+p/2,j+q/2,k+m/2}$ 的所有 8 个体心变量的最小和最大值.

为了将角点的值用格心的变量表达,式(5)可以进一步改写为

$$\begin{aligned} \Phi_{i+p/2,j+q/2,k+m/2} &= \\ &\bar{\Phi}_{i,j,k} + \Delta\Phi_{\xi}^p + \Delta\Phi_{\eta}^q + \Delta\Phi_{\zeta}^m = \\ &\bar{\Phi}_{i,j,k} + \left[1 + \frac{\Delta\Phi_{\eta}^q}{\Delta\Phi_{\xi}^p} + \frac{\Delta\Phi_{\zeta}^m}{\Delta\Phi_{\xi}^p}\right] \Delta\Phi_{\xi}^p \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $\Delta\Phi_{\xi}^p, \Delta\Phi_{\eta}^q, \Delta\Phi_{\zeta}^m$ 表示从格心到网格界面分别沿 ξ, η, ζ 三个方向的变化量.则

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{p,q,m}^{\min} &\leq \bar{\Phi}_{i,j,k} + \left[1 + \frac{\Delta\Phi_{\eta}^q}{\Delta\Phi_{\xi}^p} + \frac{\Delta\Phi_{\zeta}^m}{\Delta\Phi_{\xi}^p}\right] \Delta\Phi_{\xi}^p \leq \bar{\Phi}_{p,q,m}^{\max} \\ \frac{\bar{\Phi}_{p,q,m}^{\min} - \bar{\Phi}_{i,j,k}}{\left[1 + \frac{\Delta\Phi_{\eta}^q}{\Delta\Phi_{\xi}^p} + \frac{\Delta\Phi_{\zeta}^m}{\Delta\Phi_{\xi}^p}\right]} &\leq \Delta\Phi_{\xi}^p \leq \frac{\bar{\Phi}_{p,q,m}^{\max} - \bar{\Phi}_{i,j,k}}{\left[1 + \frac{\Delta\Phi_{\eta}^q}{\Delta\Phi_{\xi}^p} + \frac{\Delta\Phi_{\zeta}^m}{\Delta\Phi_{\xi}^p}\right]} \end{aligned} \quad (7)$$

不失一般性,假设 $\Delta\Phi_{\xi}^p$ 是非负值,那么式(7)可以进一步简化为

$$0 \leq \Delta\Phi_{\xi}^p \leq \frac{\bar{\Phi}_{p,q,m}^{\max} - \bar{\Phi}_{i,j,k}}{\left[1 + \frac{\Delta\Phi_{\eta}^q}{\Delta\Phi_{\xi}^p} + \frac{\Delta\Phi_{\zeta}^m}{\Delta\Phi_{\xi}^p}\right]} \quad (8)$$

当 $0 < r_1^{\xi} < 1$ 时,引入 α 且记 $\Delta\Phi_{\xi}^p \leq 0.5\alpha\Delta\Phi_{i+1/2,j,k}$,代入式(8)

$$\begin{aligned} 0 &\leq 0.5\alpha\Delta\Phi_{i+1/2,j,k} \leq \frac{\bar{\Phi}_{p,q,m}^{\max} - \bar{\Phi}_{i,j,k}}{\left[1 + \frac{\Delta\Phi_{\eta}^q}{\Delta\Phi_{\xi}^p} + \frac{\Delta\Phi_{\zeta}^m}{\Delta\Phi_{\xi}^p}\right]} \\ 0 &\leq \alpha \leq \frac{2(\bar{\Phi}_{p,q,m}^{\max} - \bar{\Phi}_{i,j,k})}{\left[1 + \frac{\Delta\Phi_{\eta}^q}{\Delta\Phi_{\xi}^p} + \frac{\Delta\Phi_{\zeta}^m}{\Delta\Phi_{\xi}^p}\right] \Delta\Phi_{i+1/2,j,k}} \end{aligned} \quad (9)$$

当 $r_1^{\xi} > 1$ 时, $\Delta\Phi_{\xi}^p \leq 0.5\alpha\Delta\Phi_{i-1/2,j,k} = 0.5\frac{\alpha}{r_1^{\xi}}$

$\Delta\Phi_{i+1/2,j,k}$,代入式(8)

$$\begin{aligned} 0 &\leq 0.5\frac{\alpha}{r_1^{\xi}}\Delta\Phi_{i+1/2,j,k} \leq \frac{\bar{\Phi}_{p,q,m}^{\max} - \bar{\Phi}_{i,j,k}}{\left[1 + \frac{\Delta\Phi_{\eta}^q}{\Delta\Phi_{\xi}^p} + \frac{\Delta\Phi_{\zeta}^m}{\Delta\Phi_{\xi}^p}\right]} \\ 0 &\leq \alpha \leq \frac{2r_1^{\xi}(\bar{\Phi}_{p,q,m}^{\max} - \bar{\Phi}_{i,j,k})}{\left[1 + \frac{\Delta\Phi_{\eta}^q}{\Delta\Phi_{\xi}^p} + \frac{\Delta\Phi_{\zeta}^m}{\Delta\Phi_{\xi}^p}\right] \Delta\Phi_{i+1/2,j,k}} \end{aligned} \quad (10)$$

所以,综合式(9)和式(10)得

$$0 \leq \alpha \leq \frac{2\max(r_1^{\xi}, 1)(\bar{\Phi}_{p,q,m}^{\max} - \bar{\Phi}_{i,j,k})}{\left[1 + \frac{\Delta\Phi_{\eta}^q}{\Delta\Phi_{\xi}^p} + \frac{\Delta\Phi_{\zeta}^m}{\Delta\Phi_{\xi}^p}\right] \Delta\Phi_{i+1/2,j,k}} \quad (11)$$

如果仅考虑 Minmod 限制器上部分限制性区域,那么 $1 \leq \alpha$,所以

$$1 \leq \alpha \leq \frac{2\max(r_1^{\xi}, 1)(\bar{\Phi}_{p,q,m}^{\max} - \bar{\Phi}_{i,j,k})}{\left[1 + \frac{\Delta\Phi_{\eta}^q}{\Delta\Phi_{\xi}^p} + \frac{\Delta\Phi_{\zeta}^m}{\Delta\Phi_{\xi}^p}\right] \Delta\Phi_{i+1/2,j,k}} \quad (12)$$

同理可以得到当 $\Delta\Phi_{\xi}^p$ 是负值时, α 的取值范围为

$$1 \leq \alpha \leq \frac{2\max(r_1^{\xi}, 1)(\bar{\Phi}_{p,q,m}^{\min} - \bar{\Phi}_{i,j,k})}{\left[1 + \frac{\Delta\Phi_{\eta}^q}{\Delta\Phi_{\xi}^p} + \frac{\Delta\Phi_{\zeta}^m}{\Delta\Phi_{\xi}^p}\right] \Delta\Phi_{i+1/2,j,k}} \quad (13)$$

以上简要推导了满足多维空间中单调性限制条件的 α 取值范围,当取其极大值时,就获得了多维限制函数.这样一维限制条件和多维限制条件分别为

一维限制条件

$$\phi(r) = \max(0, \min(2r, 2))$$

多维限制条件

$$\phi(r) = \max(0, \min(\alpha r, \alpha)) \quad (14)$$

公式详细推导请读者参考文献[10-11].

1.3 MLP 高阶重构格式

MLP 框架下的高阶多维限制条件进一步写为^[10]

$$\phi(r) = \max(0, \min(\alpha r, \alpha, \beta)) \quad (15)$$

α 由式(12)和式(13)计算得出. β 的取值则依赖于格式具体重构阶数的选择,如表 1 为 β 的几种选择标准,可以实现从 2 阶到 5 阶重构.

表 1 β 的取值与重构阶数Table 1 Reconstruction order with different β

β_l	β_r	重构阶数
1	1	2 阶迎风差分
r_l^1	r_{l+1}^1	2 阶中心差分
$(1+2r_l^1)/3$	$(2r_{l+1}^1+1)/3$	3 阶迎风偏置
$(-1/r_{l-1}^1+4+3r_l^1)/6$	$(3r_{l+1}^1+4-1/r_{l+2}^1)/6$	4 阶迎风偏置
$(-2/r_{l-1}^1+11+24r_l^1-3r_l^1r_{l+1}^1)/30$	$(-3r_{l+1}^1r_{l+2}^1+24r_{l+1}^1+11-2/r_{l+2}^1)/30$	5 阶迎风偏置

1.4 MLP 5

最终的高阶多维限制器 MLP 格式在三维空间中沿 ξ 方向的表达形式为

$$\begin{aligned}\Phi_{i+1/2,j,k}^l &= \bar{\Phi}_{i,j,k} + 0.5\phi(r_{l,i,j,k}^{\xi}, \alpha_l, \beta_l)\Delta\Phi_{i-1/2,j,k} = \bar{\Phi}_{i,j,k} + \\ &0.5\max[0, \min(\alpha_l, \alpha_l r_{l,i,j,k}^{\xi}, \beta_l)]\Delta\Phi_{i-1/2,j,k} \\ \Phi_{i+1/2,j,k}^r &= \bar{\Phi}_{i+1,j,k} - 0.5\phi(r_{r,i+1,j,k}^{\xi}, \alpha_r, \beta_r)\Delta\Phi_{i+3/2,j,k} = \bar{\Phi}_{i+1,j,k} - \\ &0.5\max[0, \min(\alpha_r, \alpha_r r_{r,i+1,j,k}^{\xi}, \beta_r)]\Delta\Phi_{i+3/2,j,k}\end{aligned}\quad (16)$$

其中 α 为多维限制系数, β 为由高阶多项式插值得到的当地梯度。

1) 如果 $\Delta\Phi_{\xi}^l \geq 0$, 那么

$$\begin{aligned}\alpha_l &= g\left[\frac{2\max(r_{l,i,j,k}^{\xi}, 1)(\bar{\Phi}_{p,q,m}^{\max} - \bar{\Phi}_{i,j,k})}{\left[1 + \frac{\Delta\Phi_{\eta}^q}{\Delta\Phi_{\xi}^l} + \frac{\Delta\Phi_{\xi}^m}{\Delta\Phi_{\xi}^l}\right]_{i,j,k}}\Delta\Phi_{i+1/2,j,k}\right] \\ \alpha_r &= g\left[\frac{2\max\left(\frac{1}{r_{r,i+1,j,k}^{\xi}}, 1\right)(\bar{\Phi}_{p,q,m}^{\min} - \bar{\Phi}_{i+1,j,k})}{\left[1 + \frac{\Delta\Phi_{\eta}^q}{\Delta\Phi_{\xi}^l} + \frac{\Delta\Phi_{\xi}^m}{\Delta\Phi_{\xi}^l}\right]_{i+1,j,k}}\Delta\Phi_{i+3/2,j,k}\right]\end{aligned}\quad (17)$$

2) 如果 $\Delta\Phi_{\xi}^l < 0$, 那么

$$\begin{aligned}\alpha_l &= g\left[\frac{2\max(r_{l,i,j,k}^{\xi}, 1)(\bar{\Phi}_{p,q,m}^{\min} - \bar{\Phi}_{i,j,k})}{\left[1 + \frac{\Delta\Phi_{\eta}^q}{\Delta\Phi_{\xi}^l} + \frac{\Delta\Phi_{\xi}^m}{\Delta\Phi_{\xi}^l}\right]_{i,j,k}}\Delta\Phi_{i+1/2,j,k}\right] \\ \alpha_r &= g\left[\frac{2\max\left(\frac{1}{r_{r,i+1,j,k}^{\xi}}, 1\right)(\bar{\Phi}_{p,q,m}^{\max} - \bar{\Phi}_{i+1,j,k})}{\left[1 + \frac{\Delta\Phi_{\eta}^q}{\Delta\Phi_{\xi}^l} + \frac{\Delta\Phi_{\xi}^m}{\Delta\Phi_{\xi}^l}\right]_{i+1,j,k}}\Delta\Phi_{i+3/2,j,k}\right]\end{aligned}\quad (18)$$

$$\begin{aligned}r_{l,i,j,k}^{\xi} &= \frac{\Delta\Phi_{i+1/2,j,k}}{\Delta\Phi_{i-1/2,j,k}}, \quad r_{r,i+1,j,k}^{\xi} = \frac{\Delta\Phi_{i+1/2,j,k}}{\Delta\Phi_{i+3/2,j,k}} \\ g(x) &= \max(1, \min(2, x))\end{aligned}\quad (19)$$

对于 5 阶 MLP5 格式, β 取值为

$$\begin{aligned}\beta_l &= \frac{-2/r_{l,i-1,j,k}^{\xi} + 11 + 24r_{l,i,j,k}^{\xi} - 3r_{l,i,j,k}^{\xi}r_{l,i+1,j,k}^{\xi}}{30} \\ \beta_r &= \frac{-2/r_{r,i+2,j,k}^{\xi} + 11 + 24r_{r,i+1,j,k}^{\xi} - 3r_{r,i+1,j,k}^{\xi}r_{r,i,j,k}^{\xi}}{30}\end{aligned}\quad (20)$$

1.5 MLP 格式的修正

通过上述的推导可以看出, MLP 系列格式引入了周围多个点的流场信息, 即使强激波沿着网格对角线分布, 仍能保持数值格式的稳定性。然而, 由于此限制作用过强, 在远离强激波区域会导致过量的数值耗散。我们引入激波探测因子 $f^{[16]}$, 在强激波区域开启 MLP 限制器, 在远离强激波的光滑区域使数值格式恢复到相应的高阶重构。MLP5 的表达式转化为

$$\begin{aligned}\Phi_{i+1/2,j,k}^l &= \bar{\Phi}_{i,j,k} + \\ &0.5[\beta_l + f(\phi(r_{l,i,j,k}^{\xi}, \alpha_l, \beta_l) - \beta_l)]\Delta\Phi_{i-1/2,j,k} \\ \Phi_{i+1/2,j,k}^r &= \bar{\Phi}_{i+1,j,k} - \\ &0.5[\beta_r + f(\phi(r_{r,i+1,j,k}^{\xi}, \alpha_r, \beta_r) - \beta_r)]\Delta\Phi_{i+3/2,j,k}\end{aligned}\quad (21)$$

$$f = \frac{(\nabla \cdot \mathbf{V})^2}{(\nabla \cdot \mathbf{V})^2 + \Omega^2 + \epsilon}, \quad \epsilon = 10^{-30}$$

式中 Ω 为涡量值; ϵ 是一个正的小量, 防止出现分母为 0 时的数值问题。此函数在激波附近接近于 1, 在光滑流动区域接近于 0; 且只依赖于当地速度分量, 具有较大的普适性。

2 MLP 在可压缩流动中的应用

2.1 前台阶超声速流动数值模拟

计算来流马赫数为 1.8, 模型下表面有一个 15° 的转折, 计算模型如图 1 所示。控制方程为欧拉方程, 上下表面边界条件均为滑移壁面, 进口设置为均匀来流边界条件, 出口为外插边界条件。分别采用 3 阶格式, MUSCL、5 阶 WENO 重构格式

和基于 MLP 框架的 2 阶、3 阶、5 阶重构格式;无黏通量的计算采用作者发展的 HLL-HLLC 近似黎曼求解器^[10]. 本文在计算中将此二维模型沿展向延伸了一个单位长度,分布了 9 个网格点,采用本文的三维代码计算,实际网格的截面示意图如图 2.

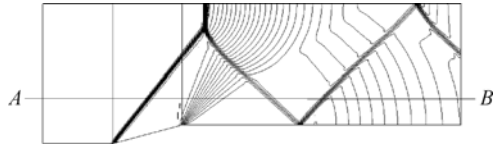


图 1 前台阶计算模型示意图

Fig. 1 Schematic diagram of computational model for facing step geometry

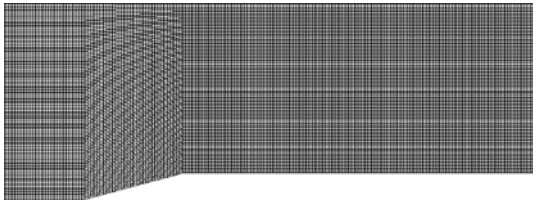
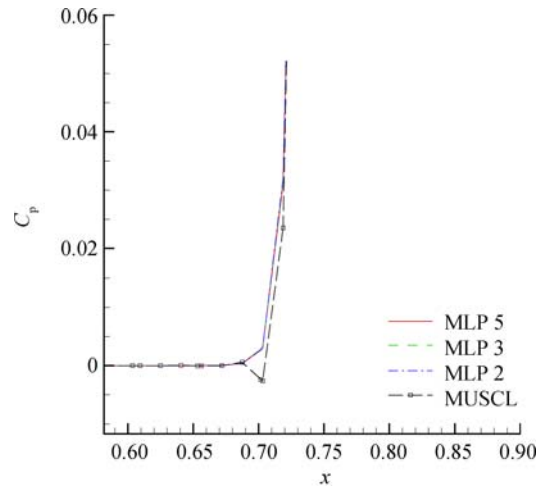


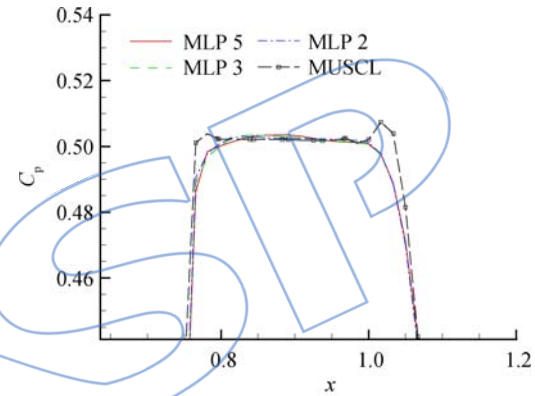
图 2 计算网格示意图

Fig. 2 Schematic diagram of computational grid

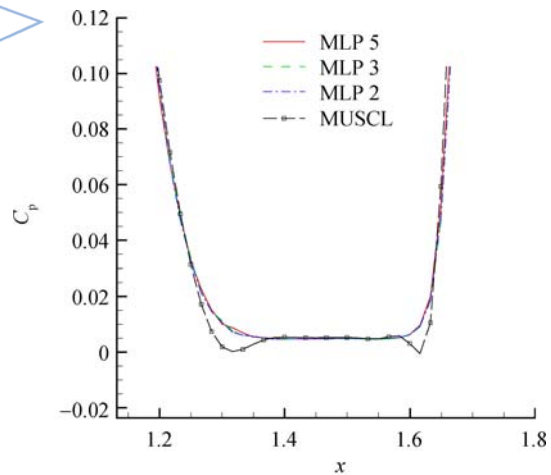
图 3 所示为图 1 中 AB 线上的压力系数(C_p)分布,可见 MLP 系列格式显著消除了 MUSCL 格式在强激波附近的非物理振荡,改善了其在膨胀波附近的过冲现象. 图 3(b)图为第 1 道斜激波附近的压力系数分布,可见 MUSCL 三阶重构格式出现了过冲现象,MLP 2,MLP 3 和 MLP 5 表现较好. 图 3(c)图为第 1 道斜激波波后和膨胀波波前的压力系数分布,MUSCL 格式出现较为严重的数值振荡,MLP 系列格式即使采用 5 阶重构,仍然保持了严格的单调特性. 图 3(d)图为膨胀波波后和第 2 道斜激波波前的压力系数分布,MLP 系列格式表现较好. 由此可以看出,MUSCL



(b) L 区域局部放大图



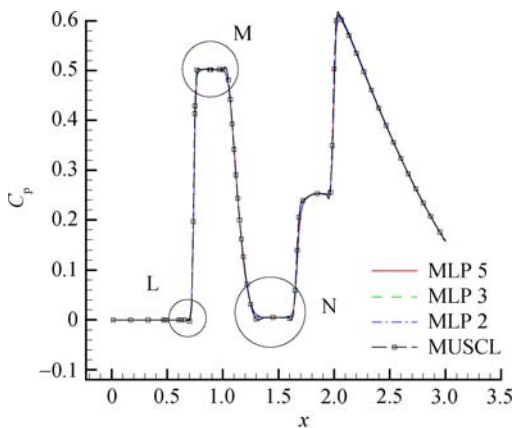
(c) M 区域局部放大图



(d) N 区域局部放大图

图 3 沿 AB 线压力系数分布

Fig. 3 C_p distributions along the AB line



(a) 沿 AB 线压力系数分布

格式直接由一维推广到多维,并不能满足多维空间中的单调性限制条件;而 MLP 系列格式可以在提高重构阶数的同时有效抑制多维空间中的数值振荡. 从图 4 可以明显看出,MLP 5 格式得到的压力分布比 MUSCL 三阶格式和 WENO 五阶格式更加光滑;MUSCL 和 WENO 格式流场解在激波附近出现严重的数值振荡.

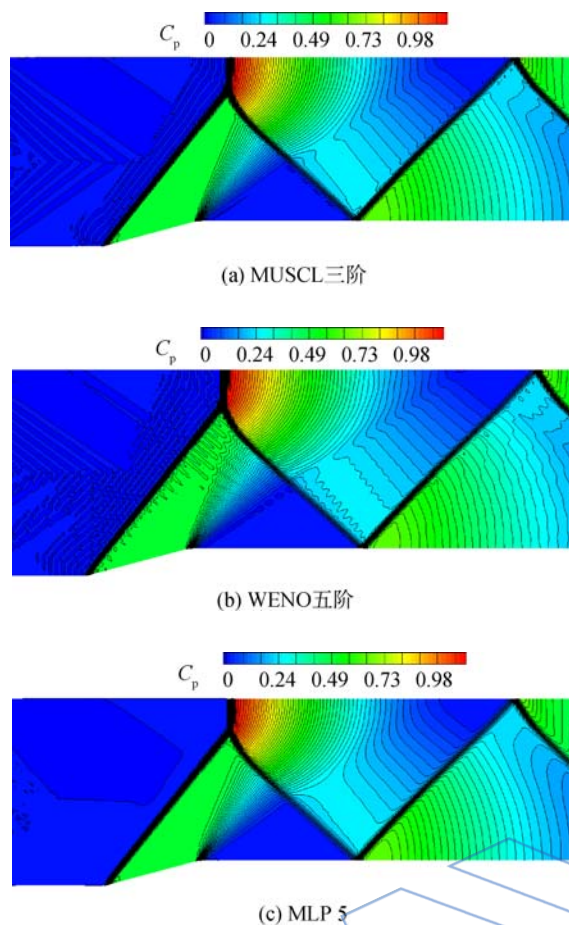


图 4 前台阶压力系数分布云图比较

Fig. 4 Comparisons of C_p contour for facing step geometry

表 2 为不同格式的计算效率比较,统计了 100 个推进步的总时间,计算部分包括无黏通量计算、边界条件处理和 LU-SGS (lower-upper symmetric Gauss-Seidel) 隐式时间推进. 本文比较中 MUSCL 格式采用 3 阶重构,耦合 van Albada 通量限制器. 可以看出不加修正 MLP 3 格式与 MUSCL 格式的计算时间相当,从理论公式也可看出, MUSCL 格式计算量很大部分来自于通量限制器的求解, MLP 3 格式来自于多维限制系数 α ; 不加修正 MLP 5 格式的计算量要增加 16% 以上,原因在于 MLP 5 格式本身 β 的计算公式较为复杂. 另在边界上 MLP 5 格式需要 3 个虚网格, MUSCL 格式仅仅需要 2 个虚网格,这样虚网格的数据交换增加了机时; 有修正的 MLP 5 格式增加时间较多,主要因为修正格式需要求解每个点的速度散度和涡量. 综上, MLP 格式相对于传统 MUSCL 格式具有相似的计算效率. 对于简单无黏流动,建议不采用本文修正,因为会大大增加计算时间; 但是对于存在分离或流动较为复杂的黏性流动数值模拟,采用本文修正可以在更大的

范围内得到 5 阶重构结果. 并且由于湍流模型需要求解速度导数和涡量等,这样修正格式不需重新求解,增加的时间将可以忽略不计.

表 2 不同格式计算效率的比较

Table 2 Comparisons of computational efficiency of different schemes

100 个 时间步	MUSCL	MLP 3 (无修正)	MLP 5 (无修正)	MLP 5 (有修正)
总时间/min	0.61	0.64	0.71	0.79

2.2 结冰翼型的非定常流动数值模拟

本算例数值模拟了经过前缘结冰 NACA0012 翼型的非定常流动,计算条件为:来流马赫数为 0.3,攻角为 15° ,单位长度雷诺数为 10^6 . 图 5 为计算网格沿展向的一个截面,展向分布 41 个点. 采用基于 S-A (Spalart-Allmaras) 湍流模型的 MDES (modified delayed detached eddy simulation) 脱体涡方法模拟非定常涡的脱落过程,所有格式计算的初值均为一个相同的 S-A 湍流模型计算出的定常解;采用双时间步长法进行 2 阶时间精度推进,计算到一个相同的物理时间停止. 数值格式分别选择 MLP5, HLL-HLLC 以及 MUSCL 3rd, Roe.

此算例来流马赫数为 0.3,主要流动现象为大分离流动,不存在激波等间断,故本文设计的激波捕获函数将起重要作用,使 MLP 5 格式恢复为标准的 5 阶重构. 如图 6 所示描述空间涡结构的等 λ_2 涡面,翼型上表面产生了非常强的分离涡.

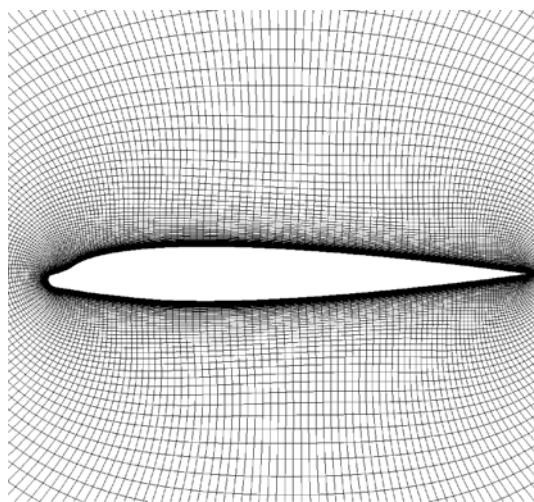


图 5 前缘结冰 NACA0012 翼型计算模型示意图

Fig. 5 Computational model schematic for NACA0012 airfoil with ice accretion

本文发展的 MLP 5 格式相对于传统的 MUSCL 三阶重构格式捕获了更加丰富的涡结构. 尤其是在前缘上翼面, MLP 5 格式由于其较低的耗散性, 分辨出了非常细致的小涡结构, 这些涡结构对类似于航空气动噪声的预测是非常有利的. 对于此格式在非定常流动数值模拟中的应用, 还需进一步作定量分析研究.

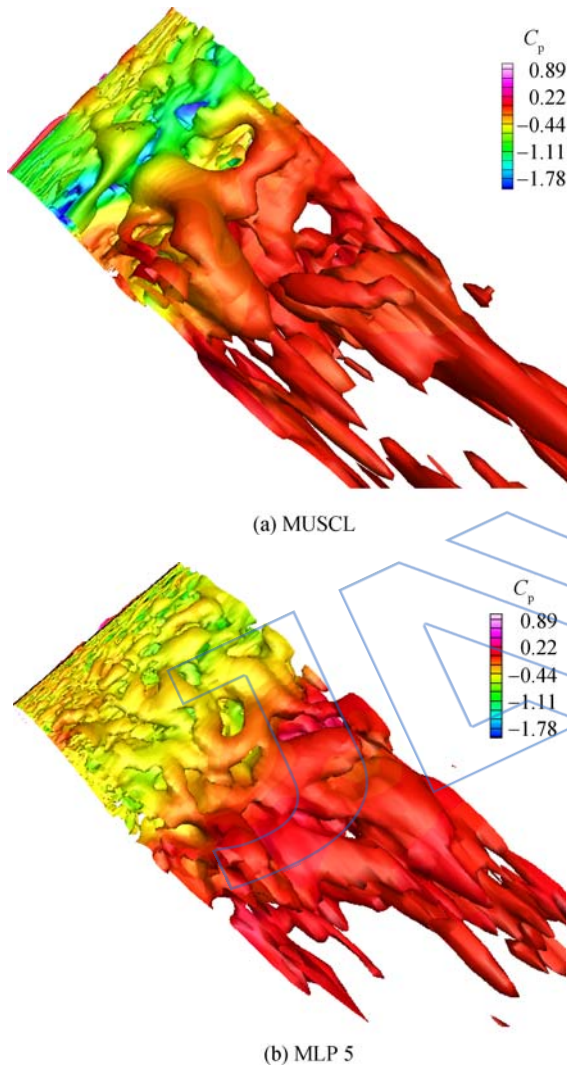


图 6 等 λ_2 涡面图

Fig. 6 Snapshot of ISO surface of λ_2 criterion

2.3 高超声速双楔流动数值模拟

Neuenhahm 等人为了研究前缘半径 R_n 大小和壁面温度对高超声速双楔流动的影响做了一系列实验^[17]. 超声速双楔流动包含强激波附面层干扰和小分离现象, 是考察数值计算格式和求解器的典型算例. 本算例计算模型如图 7 所示.

计算条件为: 来流马赫数为 8.1, 静压为 520 Pa, 静温为 106 K, 单位长度雷诺数为 3.8×10^6 . 壁面为等温无滑移边界条件. 如图 8 所示, 计算网

格为 3 块点对接网格, y^+ 的最大值为 0.9. 分别采用 MUSCL 三阶重构格式, 和基于 MLP 框架的 2 阶、3 阶、5 阶格式. 无黏通量的计算采用 HLL-HLLC 近似黎曼求解器; 黏性通量采用层流模型计算.

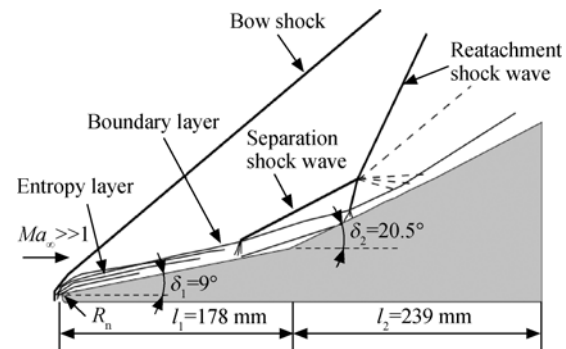


图 7 高超声速双楔流动模型^[14]

Fig. 7 Hypersonic flow over double wedge configuration model

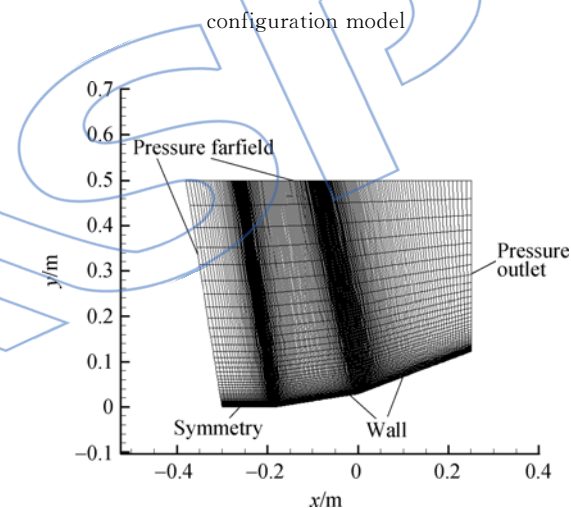


图 8 高超声速双楔模型计算网格

Fig. 8 Computational grid for hypersonic flow over double wedge configuration model

图 9(a) 和图 9(b) 为不同格式计算压力系数分布与实验对比, 由于实验洞壁干扰等因素, 实验中取了 3 次实验值分别为 Exp. 1, Exp. 2 和 Exp. 3, 可以看出 MLP 系列格式的计算结果显著好于 MUSCL 三阶重构格式. 主要原因是本算例在二维空间中的激波强度大, 且不与网格线平行, 对数值格式要求非常高. 在模型的折角附近, 存在分离泡并且诱导出再附激波, MLP 格式更好地捕捉了此分离泡. 其中 MLP 3 和 MLP 5 高阶格式好于 MLP 2, MLP 5 略好于 MLP 3. 由此看出 MLP 系列格式在含激波、分离的复杂流场模拟中表现较好, 并且可以实现较高的数值精度. 图 10 为 MLP 5 格式计算出的压力分布云图, 可以清晰地看出分

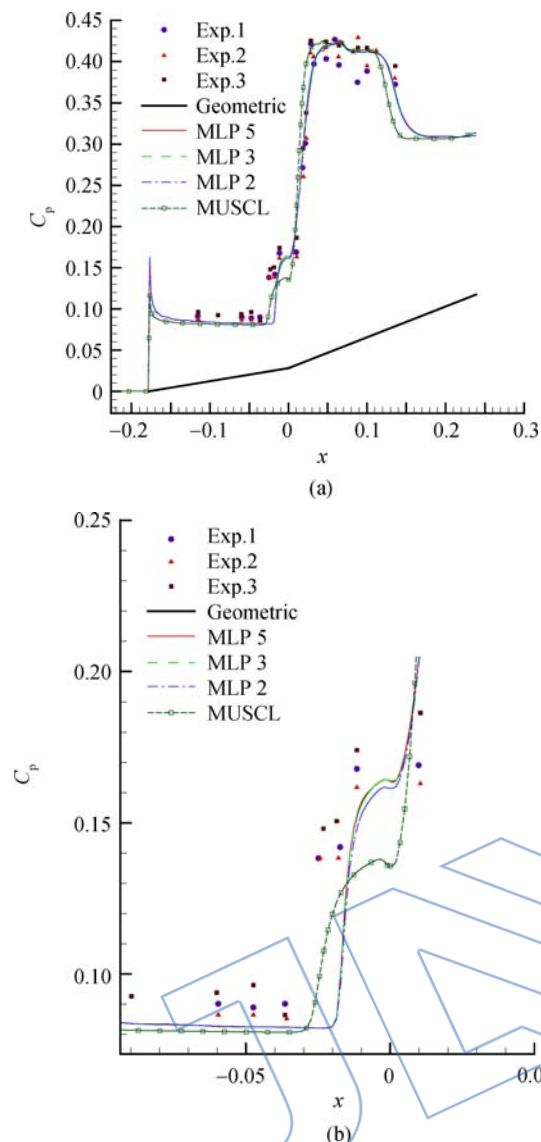


图 9 双楔模型压力系数分布与实验比较

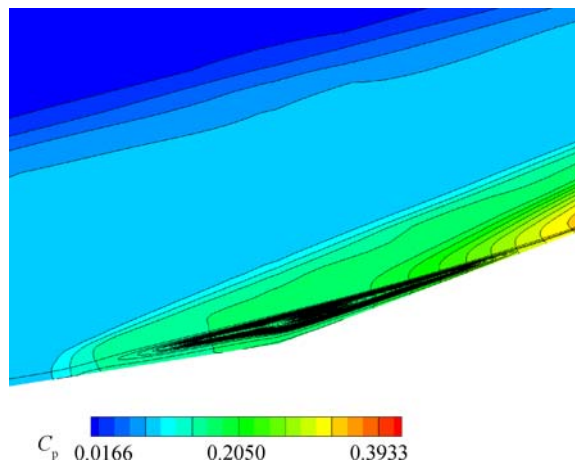
Fig. 9 Comparisons of C_p distribution with experiments for double wedge

图 10 双楔模型计算压力系数分布方图(MLP5)

Fig. 10 Distribution of C_p contour for double wedge (MLP5)

离泡诱导出的激波。

2.4 DLR F6-WB 跨声速流场数值模拟

DLR F6-WB 翼身组合体为航空工程计算的基本模型,美国 NASA、德国宇航院等研究机构为此模型提供了丰富的实验和数值模拟数据^[18]. 计算条件为:来流马赫数为 0.75,攻角为 0.49° ,单位长度雷诺数为 2.125×10^7 . 湍流模型为 S-A 一方程模式;数值格式分别选择 MLP 5, HLL-HLLC 以及 MUSCL 3rd, Roe. 计算网格如图 11, 网格总量约为 400 万。

如图 12 所示,MLP 5 高阶重构格式和 MUSCL 三阶重构格式计算结果与实验吻合良好. 在展向 51.4%、展向 63.8%和展向 84.7%站位上,MLP 5 计算激波位置和强度显著强于 MUSCL 三阶格式,更接近于实验值. MLP 5 格式计算前缘吸力峰值强度更大. 如图 13(a)和图

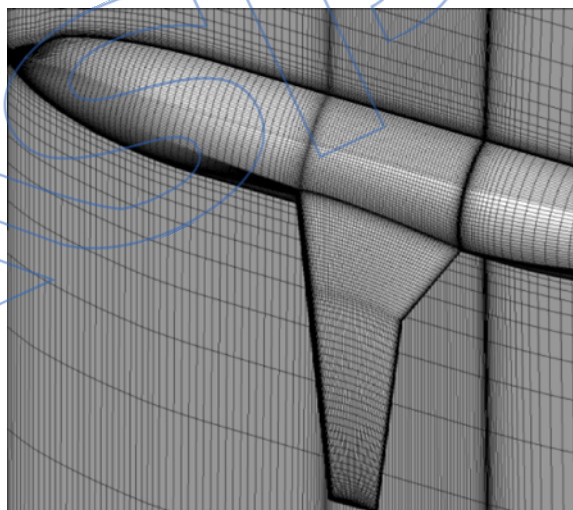
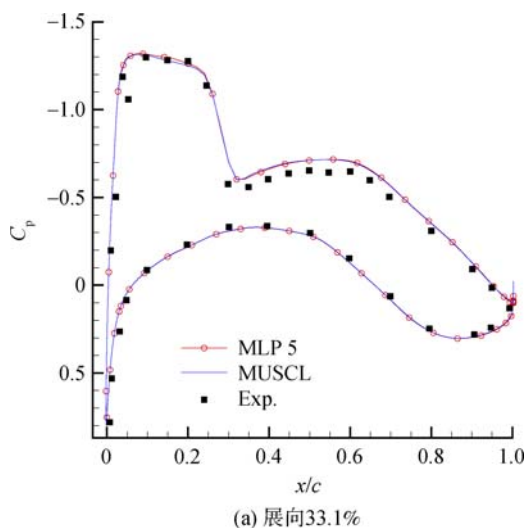
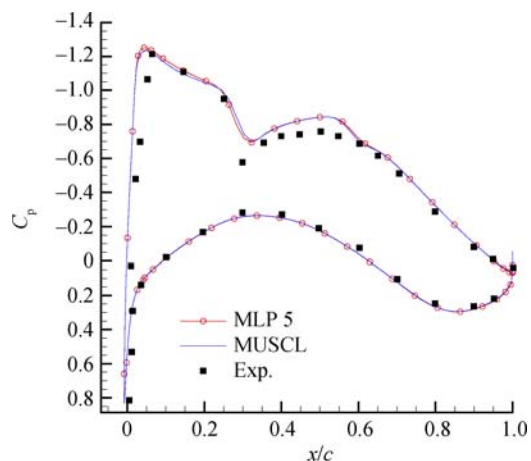


图 11 DLR F6-WB 计算网格

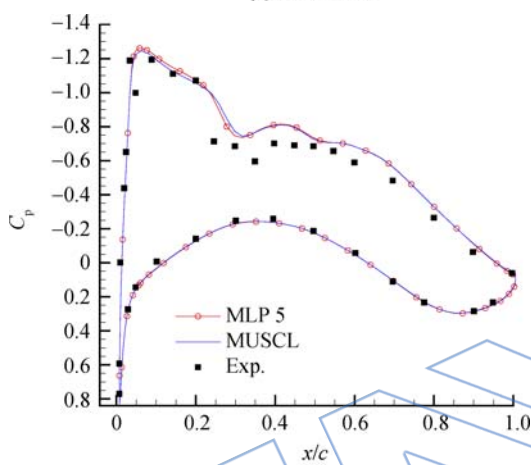
Fig. 11 Computational grid of DLR F6-WB



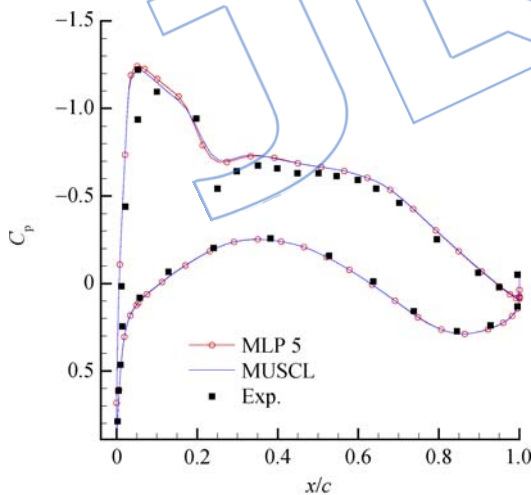
(a) 展向 33.1%



(b) 展向51.4%



(c) 展向63.8%

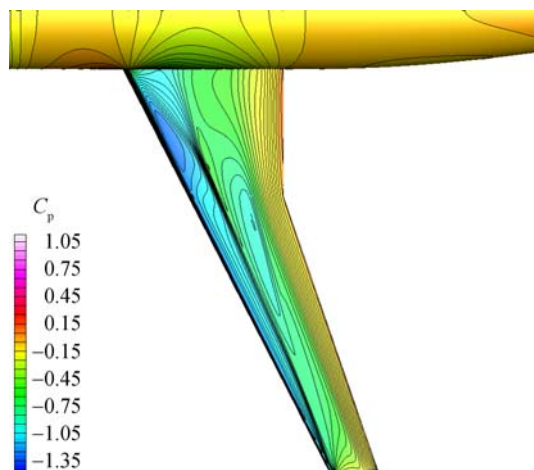


(d) 展向84.7%

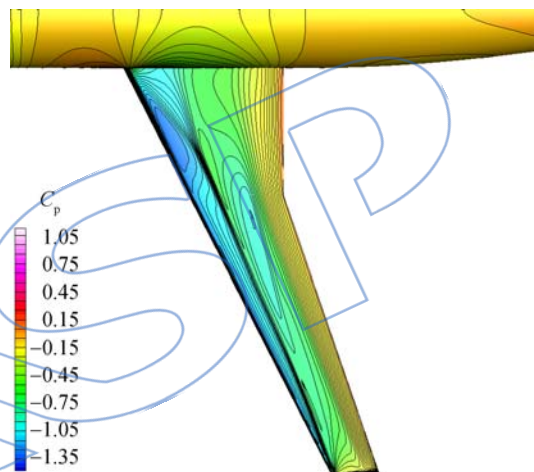
图 12 DLR F6-WB 压力系数分布与实验比较

Fig. 12 Comparisons of C_p distribution with experiments for DLR F6-WB

13(b)分别给出了采用两种格式得到的机翼表面压力系数分布云图,MLP 5 格式捕获的激波强度大于 MUSCL. 通过此算例可以看出,跨声速复杂构型工程计算中,MLP 5 高阶重构格式表现较好,具有较低的耗散及良好的激波捕捉能力. 从图 14



(a) MUSCL



(b) MLP 5

图 13 DLR F6-WB 压力系数分布云图比较

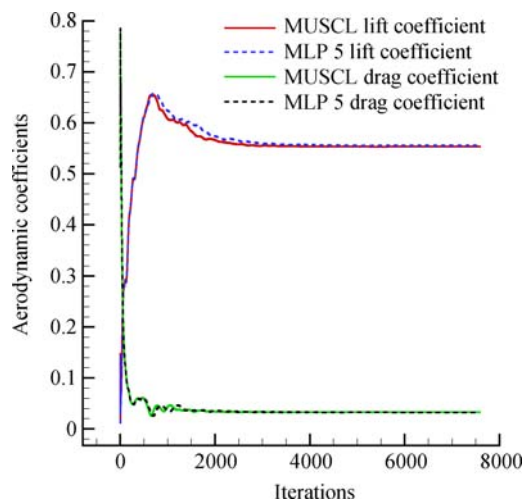
Fig. 13 Comparison of C_p distribution contour for DLR F6-WB

图 14 DLR F6-WB 气动力系数收敛历史

Fig. 14 Convergence history of aerodynamic coefficients for DLR F6-WB

的升阻力收敛历史可以看出, MLP 5 与传统 TVD 格式 MUSCL 的收敛性基本相当; 由于 5 阶重构的影响收敛速度稍慢. 满足航空复杂工程计算的要求.

3 结 论

本文研究了高阶多维限制器 MLP 系列格式, 同时引入激波探测函数进一步降低 MLP 在光滑流动区域的数值耗散. 基于自主研发的可压缩求解器 LMNS3D, 结合 HLL-HLLC 近似黎曼求解器, 数值模拟了 4 个典型的复杂可压缩流动现象. 得到以下结论:

1) 在复杂的三维强激波流动数值模拟中, MLP 系列格式能够在多维空间中有效地消除激波等间断附近的非物理数值振荡, 保持流场中严格的数值单调特性. 相对于传统的满足一维 TVD 条件的 MUSCL 格式有显著的优势, 并且容易实现高阶重构.

2) 在非定常流动数值模拟中, MLP5 高阶重构格式具有更低的数值耗散, 能够捕获更丰富的流动现象. 对非定常流动数值模拟有重要意义, 仍需进一步作定量分析研究.

3) 在跨声速复杂流场数值模拟中, MLP5 重构格式相对于传统 MUSCL 三阶格式捕获的激波更加陡峭, 与实验值吻合更好. 由此可见, MLP 系列格式具有很强的工程应用价值, 值得引入到航空工程数值模拟中.

参考文献:

- [1] 张涵信, 沈孟育. 计算流体力学: 差分方法的原理和应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2003.
- [2] 王保国, 刘淑艳, 姜国义, 等. 高阶格式及其在内外流场计算中的应用[J]. 航空动力学报, 2008, 23(1): 55-63.
WANG Baoguo, LIU Shuyan, JIANG Guoyi, et al. High-order scheme and its application to the computation of the internal and external flow field[J]. Journal of Aerospace Power, 2008, 23(1): 55-63. (in Chinese)
- [3] 王超, 吴颂平. 一种适用于热流计算的改进 WENO 格式[J]. 航空动力学报, 2012, 27(11): 2499-2504.
WANG Chao, WU Songping. Improved weighted essential non-oscillatory methods in hypersonic heat-flux simulation[J]. Journal of Aerospace Power, 2012, 27(11): 2499-2504. (in Chinese)
- [4] 陈志夫, 文桂林, 王艳广, 等. 用于气动声学计算的非均匀网格紧致差分格式[J]. 航空动力学报, 2013, 28(1): 180-187.
CHEN Zhifu, WEN Guilin, WANG Yanguang, et al. Compact finite difference schemes on non-uniform meshes for computational aeroacoustics[J]. Journal of Aerospace Power, 2013, 28(1): 180-187. (in Chinese)
- [5] DENG Xiaogang, Maekawa H. Compact high-order accurate nonlinear schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1997, 130(1): 77-91.
- [6] Godunov S K. A difference method for the numerical calculation of discontinuous solutions of hydrodynamic equations[J]. Matematischeskii Sbornik, 1959, 47(89): 271-306.
- [7] Harten A, Engquist B, Stanley O, et al. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1987, 71(2): 231-323.
- [8] Van Leer B. Towards the ultimate conservation difference scheme V: a second-order sequel to Godunov's method[J]. Journal of Computational Physics, 1979, 32(1): 101-136.
- [9] LIU Xudong, Osher S, Chan T F. Weighted essentially non-oscillatory schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1994, 115(1): 200-212.
- [10] Kim K H, Kim C G. Accurate, efficient and monotonic numerical methods for multi-dimensional compressible flows: Part II multi-dimensional limiting process[J]. Journal of Computational Physics, 2005, 208(2): 570-615.
- [11] Gerlinger P. High-order multi-dimensional limiting for turbulent flows and combustion[R]. AIAA 2011-296, 2011.
- [12] 傅林, 高正红, 左英桃. 基于 HLL-HLLC 的高阶 WENO 格式及其应用研究[J]. 计算力学学报, 2014, 31(1): 128-134.
FU Lin, GAO Zhenghong, ZUO Yingtao. High order WENO scheme based on HLL-HLLC solver and its application[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2014, 31(1): 128-134. (in Chinese)
- [13] 傅林, 高正红, 张晓东. HLL-HLLC 格式的构造与应用研究[J]. 空气动力学报, 2014, 32(1): 116-122.
FU Lin, GAO Zhenghong, ZHANG Xiaodong. Construction and application research of HLL-HLLC scheme[J]. Acta Aerodynamic Sinica, 2014, 32(1): 116-122. (in Chinese)
- [14] Shima E, Kitamura K. On new simple low-dissipation scheme of AUSM-family for all speeds[R]. AIAA 2009-136, 2009.
- [15] 傅德薰. 流体力学数值模拟[M]. 北京: 国防工业出版社, 1993.
- [16] Ducros F, Ferrand V, Nicoud F, et al. Large-eddy simulation of the shock/turbulence interaction[J]. Journal of Computational Physics, 1999, 152(2): 517-549.
- [17] Reinartz B U, Ballmann J, Boyce R. Numerical investigation of wall temperature and entropy layer effects on double wedge shock/boundary layer interactions[R]. AIAA 2006-8137, 2006.
- [18] Eliasson P E, Peng S H. Drag prediction for the DLR-F6 wing-body configuration using the edge solver[J]. Journal of Aircraft, 2008, 45(3): 837-847.